

SUPERINTEGRABILITY AND COULOMB-OSCILLATOR DUALITY

L. G. Mardoyan^{1,2,*}

¹ Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

² Yerevan State University, Yerevan, 0025, Armenia

The wave functions are given for the eight-dimensional isotropic oscillator, five-dimensional Coulomb and $SU(2)$ Yang–Coulomb monopole problems, three-dimensional MIC–Kepler problems, generalized MIC–Kepler problem and generalized Kepler–Coulomb and oscillator systems, as well as four-dimensional isotropic and double singular oscillator in coordinates systems in which separation of variables is allowed in the corresponding Schrödinger equations. Using the condition of orthogonality of radial wave functions with respect to the non-energy quantum number, which we have proven, the coefficients of the interbasis expansions of the systems given above are found. Duality transformations are established that transfer the problem of an eight-dimensional isotropic oscillator into five-dimensional Coulomb and $SU(2)$ Yang–Coulomb monopole problems (Hurwitz transformation), as well as the MIC–Kepler problem and the generalized MIC–Kepler system into a four-dimensional isotropic and double singular oscillator (Kustaanheimo–Stiefel transformation), respectively. The coefficients are found that relate the bases of these systems to each other. For the five-dimensional $SU(2)$ model of the Yang–Coulomb monopole, the hidden $SO(6)$ symmetry group is found and the energy spectrum is calculated in a purely algebraic way.

The Schrödinger equation for a “free” particle is solved in a ring-shaped model, and the formula is derived that generalizes the expansion of a plane wave into spherical waves.

Quantum-mechanical scattering problems are considered in five-dimensional Coulomb systems and $SU(2)$ Yang–Coulomb monopole systems, as well as in the fields of the MIC–Kepler problem.

Приведены волновые функции для восьмимерного изотропного осциллятора, пятимерной кулоновской задачи и $SU(2)$ -монополя Янга–Кулона, трехмерной задачи МИК–Кеплера, обобщенной задачи МИК–Кеплера и обобщенных систем Кеплера–Кулона и осциллятора, а также четырехмерного изотропного и дважды сингулярного осциллятора в системах координат, в которых допускается разделение переменных в соответствующих уравнениях Шредингера. С помощью доказанного нами условия ортогональности радиальных волновых функций относительно неэнергетического квантового числа найдены коэффициенты межбазисных разложений приведенных выше систем. Установлены преобразования дуальности, переводящие задачу о восьмимерном изотропном осцилляторе в пятимерные задачи Кулона и $SU(2)$ -монополя Янга–Кулона (преобразование Гурви-

* E-mail: mardoyan@theor.jinr.ru, mardoyan@ysu.am

ца), а также задачу МИК–Кеплера и обобщенную систему МИК–Кеплера в четырехмерный изотропный и дважды сингулярный осциллятор (преобразование Кустаанхеймо–Штифеля) соответственно. Найдены коэффициенты, связывающие базисы этих систем друг с другом. Для пятимерной $SU(2)$ -модели монополя Янга–Кулона найдена скрытая группа симметрии $SO(6)$ и чисто алгебраическим способом вычислен энергетический спектр.

Решено уравнение Шредингера для «свободной» частицы в кольцеобразной модели, и выведена формула, обобщающая разложение плоской волны по сферическим волнам.

Рассмотрены квантово-механические задачи рассеяния в пятимерных кулоновской и $SU(2)$ -монополя Янга–Кулона системах, а также в полях задачи МИК–Кеплера.

PACS: 05.40.–a